

非最不稳定性条件下畸形波特性研究

陶爱峰^{1,2}, 齐可仁^{1,2}, 焦大容³, 彭冀^{1,2}, 武雨晴^{1,2}

(1. 河海大学 海岸灾害及防护教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 港口海岸与近海工程学院, 江苏 南京 210098; 3. 72695 部队, 山东 青岛 266102)

摘要: 调制不稳定性是非线性畸形波生成的关键原因, 然而现有的成果大多只考虑了最不稳定性条件。系统研究了满足调制不稳定性激发条件的各种初始边带对应的波列演变特性。结果发现在非最不稳定性条件时, 虽然边带增长较慢、畸形波出现耗时较多, 但是最大波幅随着相对初始谱宽与波陡比值的减小而呈线性增长的趋势, 说明初始窄谱的波列会产生更强的畸形波, 畸形波的演化、特征参数也呈现出更强的非线性。

关键词: 畸形波; 非最不稳定性条件; 演化; 谱参量; 波形参数; 非线性

近 20 年来, 畸形波作为一种突发性的海浪灾害, 得到了学者们的广泛关注。畸形波的生成机理是关注方向之一。在畸形波生成机理的有关研究中, 调制不稳定性相关成果最多。不稳定性机制作为非线性畸形波生成的关键原因, 也基本得到了认可。然而现有的成果大多只考虑了最不稳定性条件下的调制不稳定性及其引起的波列演变特性, 而没有研究非最不稳定性条件下畸形波的特性。

1 调制不稳定性发生条件

调制不稳定性作为一种典型的非线性机制, 也被称为 Benjamin-Feir 不稳定性或边带不稳定性, 是指有限振幅均匀波列在演变过程中, 对边带扰动是不稳定的, 在一定时间尺度后载波能量下降, 边带能量呈指数增加, 即能量由载波转移到边带, 发生非线性自聚焦现象。Benjamin 等^[1-2]基于立方 Schrodinger 方程对该不稳定现象的发生条件及边带增长速率都进行了初步研究, 研究结果指出当满足式(1)时, 会有调制不稳定性发生。

$$r_1 < 2\sqrt{2}\varepsilon_0 \quad (1)$$

调制不稳定性中存在一种最不稳定性状态(MUC)^[3], 即边带初期增长率最大, 同等能量输入条件下, 达到的调制强度最大。最大调制后, 波列还会向初始状态恢复, 进而出现调制-解调的周期性现象^[4]。若要波列演变达到最不稳定的状态, 边带与载波的波数差及相位差须满足式(2)条件:

$$\begin{cases} r_1 = 2\varepsilon_0 \\ \Delta\theta = \pi/4 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $r_1 \equiv \Delta k/k_0$, $\Delta k \equiv k_+ - k_0 = k_0 - k_-$, k_0 代表载波波数, k_+, k_- 分别代表上下边带的波数, Δk 表示边带与载波的波数差, $\Delta\theta$ 表示边带与载波的相位差。

对调制不稳定性引起的最强不稳定性及非最强不稳定性情况下的畸形波进行数值模拟, 结果发现, 尽管非最强不稳定性条件下最大调制畸形波出现较晚, 但是其最大波幅随着相对谱宽与波陡比值的减小而呈线性增长的趋势。由于对畸形波的研究更加关注其最大波幅, 因此不仅需要关注最强不稳定性情况, 也十分有必要对非最强不稳定性条件下出现的调制畸形波的演化及特性进行研究。

2 高阶谱方法

本文所用的数值方法为高阶谱方法 HOS(High Order Spectra)^[5-7], 该方法可以考虑任意高 M 阶的波波相互作用问题, 相互作用的自由子波数目可达 $O(1\ 000)$, 对边界条件的处理采用伪谱方法, 由于使用了快速 Fourier 变换, 计算所耗时间正比于 $O(MN \ln N)$, 在波陡 $\varepsilon < 0.35$ (Stokes 极限波陡的 80%) 的情况下, 计算精度随 N 和 M 的增加, 呈指数收敛。该方法已经在研究二、三维波-波之间弱、强非线性作用等非线性

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41106001); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2012]1707)

性水波动力学机理研究中得到了广泛应用, 研究者们还从考虑表面大气压, 长短波相互作用、有限水深及变水深、存在非恒定流、存在固定或移动结构物等方面对该方法进行了各种应用研究^[8-10]。

3 调制波列 STOKES 首个最大调制畸形波演化

本节将对由调制不稳定性引起的 Stokes 波列演化过程及其伴生畸形波的特性进行研究。首先对比、分析最强不稳定条件和非最强不稳定条件下的调制 Stokes 波列演化, 再研究其伴生畸形波的不同特性参数。

3.1 弱调制波列初始条件

初始条件即初始调制波列按式(3)设计(一对边带):

$$\left. \begin{aligned} \eta(x,0) &= \eta[\varepsilon_0, k_0] + r_1 a_0 \cos(k_- x - \theta_-) + r_2 a_0 \cos(k_+ x - \theta_+) \\ \phi^s(x,0) &= -\phi^s[\varepsilon_0, k_0] + \frac{r_1 a_0}{\sqrt{k_-}} e^{k_- \eta} \sin(k_- x - \theta_-) + \frac{r_2 a_0}{\sqrt{k_+}} e^{k_+ \eta} \sin(k_+ x - \theta_+) \end{aligned} \right\} (3)$$

式中: $\eta(x,0)$ 和 $\phi^s(x,0)$ 分别代表初始波陡 ε_0 初始波数 k_0 的Stokes波列的自由表面和势, $\varepsilon_0 = k_0 a_0, a_0$ 为载波振幅, $k_{\pm} = k_0 \pm \Delta k$ 和 θ_{\pm} 分别是边带的波数和相位。参数选取最强不稳定情况及非最强不稳定情况, 算例初始波陡 ε_0 从0.05到0.09, 计算域为 $100l_0$, HOS参数选取 $M=4, N=4096, T_0/dt = 64$, dt 为模拟的时间步长。

3.2 首个调制最大畸形波的演化

调制不稳定性发生的范围是指边带与载波的波数差和载波波数之比在 $0 \sim 2\sqrt{2}\varepsilon_0$ 范围内, 其中最广为研究的是最强不稳定条件, 即 $\Delta k/k_0 = 2\varepsilon_0, \Delta\theta = \pi/4$ 。本研究首先以 $\varepsilon_0 = 0.05$ 为例, 得到图1, 即在 $0 \sim 2\sqrt{2}\varepsilon_0$ 范围内加载不同位置初期边带的波面极值演化图, 确实当 $\Delta k/k_0 = 2\varepsilon_0$ 时^[11]波列最快达到调制, 然而同时, 当 $\Delta k/k_0 = 1.6\varepsilon_0, 1.2\varepsilon_0, 0.8\varepsilon_0, 0.4\varepsilon_0$, 即加载的一对边带离载波越近时, 虽然达到最大调制的时间延迟, 但边带离载波越近其波面极值越大, 最大达到4倍以上。

将 $\varepsilon_0 = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09$ 算例满足调制不稳定激发条件下的各个初始边带对应的首次最大调制波面极值图汇总(图2), 可以更直观看到: 当边带加载在 $0 \sim 2\sqrt{2}\varepsilon_0$ 范围内才会发生调制不稳定现象; 在最强不稳定条件下产生的畸形波并不是最大, 当边带波数与载波波数越接近, 由调制不稳定性引起的畸形波的波面极值越大。

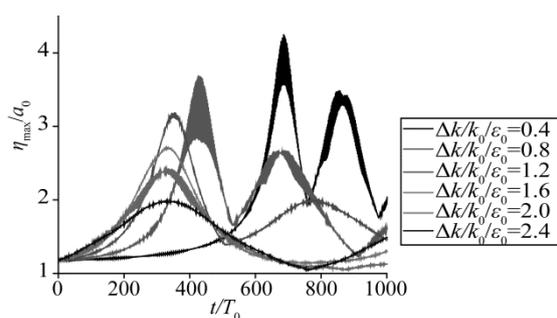


图1 $\varepsilon_0 = 0.05$ 不同位置初期边带的波面极值演化

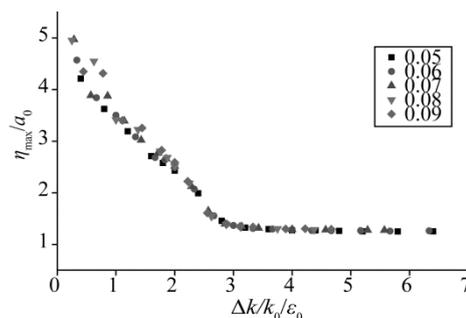


图2 各波陡不同位置初期边带首次最大调制时刻波面极值

对于调制Stokes波列首个最大调制畸形波演化, 本研究主要通过不同初始边带条件下的频谱、空间波场和主要边带能量变化情况进行分析。同样以 $\varepsilon_0 = 0.05$ 为例, 本例中, $\Delta k = 10$ 是其最强不稳定边带。从逐渐靠近载波的 $\Delta k = 10, \Delta k = 6, \Delta k = 2$ 不同初始加载边带的调制波列最大调制发生时刻的频谱、空间波面及子波能量演化过程(图3), 可以发现: 满足调制不稳定条件时, 当一对初始边带加载位置靠近载波, 相应发生首次最大调制的时刻推后, 载波和一对边带在演化过程中能够激发出更多组成波参与波波相互作用, 载波和边带之间的能量交换不再具有重现性; 对应于首次最大调制时刻的空间波面, 初始带宽越窄, 畸形波波高越大, 且波峰与波谷不对称性越明显。

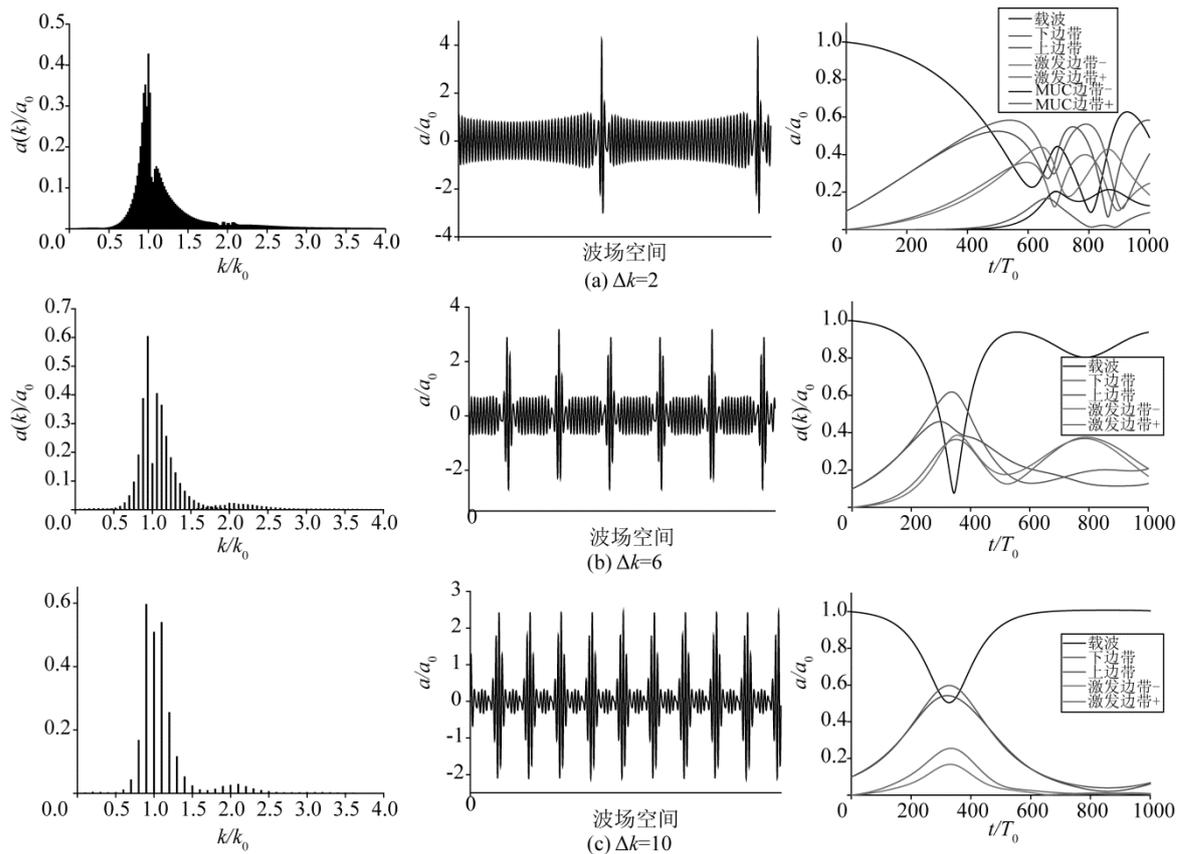


图3 $\epsilon_0 = 0.05$ 不同位置初期边带首次最大调制时刻的频谱、空间波面、波列 $1000T_0$ 内载波及主要边带演化对比

3.3 波列演化首个最大调制时刻的谱参量

针对首个最大调制时刻的频谱图,分析不同边带条件下频谱的带宽和 N_g 来分析初始边带加载位置对波场演化的影响。本文选取的谱宽度参量^[12]如式(4),其计算较为简便。

$$P = \frac{S(\omega_0)\omega_0}{m_0}$$

$$B = \frac{1}{P} \tag{4}$$

$$N_g = \frac{\sum n_i}{N}$$

$$n_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } \frac{a(n_i)}{a_0} \geq 5\% \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5}$$

式中: m_0 为谱的零阶矩; ω_0 为谱峰频率对应的谱值; P 为尖度因子,是描述风浪成长状态的参量,对于较大的 P 值,能量分布较窄;反之,能量分布较宽。 $B=1/P$,为谱的宽度。 N_g 为频域中各频率波波幅大于5%初始幅值的比率, n_i 为频域内第 i 个频率的波, N 为频域计算范围内的总频率计数, a_i 为第 i 个频率波的振幅。将 ϵ_0 从0.05到0.09算例满足调制不稳定激发条件下的各个初始边带对应的首次最大调制谱宽 B 汇总,其变化如图4。可以看出,对不同的初始波陡情况,都存在当初初始边带加载位置越靠近载波,首个最大调制时刻的频谱谱宽越大,即能量分布越宽。

由初始波陡 $\epsilon_0 = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09$ 算例的 N_g 图(图5)可知,当初初始边带的加载位置离载波越近,波列演化至首次最大调制时刻波场中被激发的组成波越多。

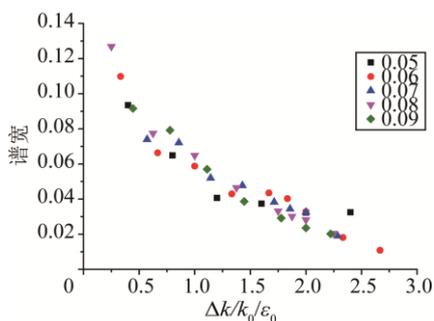


图4 各波陡不同位置初期边带首次最大调制时刻谱宽

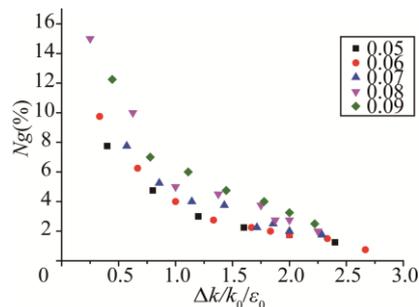
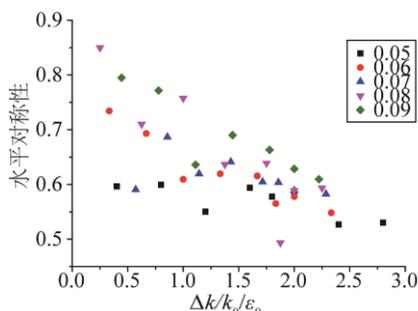


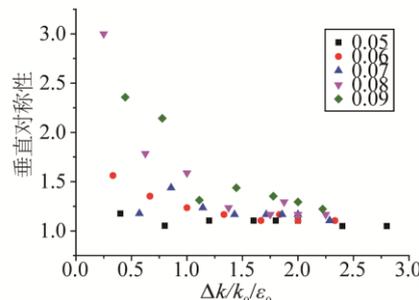
图5 各波陡不同位置初期边带首次最大调制时刻N_g

3.4 调制不稳定演化伴生畸形波特征参数

对调制不稳定性引起畸形波的特征参数，本文主要通过畸形波的波形参数、当地波陡和畸形度来研究。波形参数主要分为水平对称性和垂直对称性。本文采用水平对称性的定义为波峰高度比波高，即 η_c/H ，垂直对称性定义为波谷历时比波峰历时，即 T_t/T_c 。图6给出初始波陡 ϵ_0 从0.05到0.09的首个调制最大畸形波发生时刻的水平对称性和垂直对称性。



(a) 水平对称性

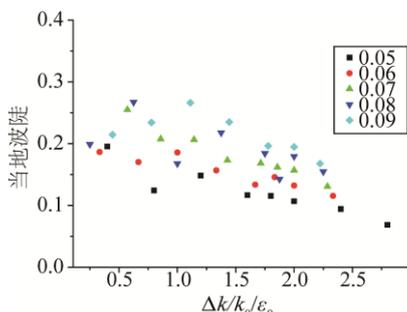


(b) 垂直对称性图

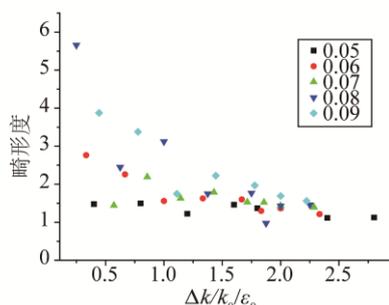
图6 各波陡不同位置初期边带首次最大调制时刻水平对称性、垂直对称性

由图6可见，初始加载边带与载波之间不同的相对位置，使得第1次最大调制状态的畸形波特性有着明显区别。随着初始加载边带相对位置越靠近载波，对于水平对称性，波峰高度占总波高比例越大，越具有尖陡的波峰和平坦的波谷；对于垂直对称性，波峰和波谷的历时差越明显，波峰历时变短，波谷历时变长。

当地波陡和畸形度都可以反映畸形波的非线性程度。本文中，初始波陡 ϵ_0 从0.05到0.09的首个调制最大畸形波发生时刻的当地波陡情况和畸形度如图7。



(a) 当地波陡



(b) 畸形度

图7 各波陡不同位置初期边带首次最大调制时刻当地波陡、畸形度分布

由图7可见，不同初始波陡的当地波陡和畸形度随初始边带位置的变化类似。随着边带加载位置向载波靠近，不同初始波陡的当地波陡都有增大趋势，并且初始波陡越大，当地波陡值越大。而对于畸形度，当初始波陡较小时，畸形度随边带位置的变化基本持平，而当初始波陡较大时，随着边带加载位置靠近载波，畸形波的畸形度逐渐增大。

畸形波的波形特点、当地波陡和畸形度都可以反映畸形波的非线性强度,随着初始边带加载位置越靠近载波,发生首次最大调制时,畸形波的非线性程度增大,并且这种非线性变化在初始波陡较大的情况下更为显著。

4 结语

本文利用高阶谱方法对满足调制不稳定激发条件的各种初始边带对应的 Stokes 波列进行数值模拟,分析其演化过程和特征参数的变化规律,可得如下结论,满足调制不稳定条件时加载不同位置的初始边带,当一对初始边带加载位置越靠近载波,发生首次最大调制的波面极值越大、首次调制时刻推后、演化过程中能够激发出更多组成波参与波波相互作用、能量交换不再重现。此外,相较于最强不稳定情况,在非最强不稳定条件下,即当初始加载边带相对位置更接近载波时,由调制不稳定性引起的首个最大调制波具有更强的非线性,并且在初始波陡较大的情况下更加显著。

参考文献

- 1 Benjamin T B, Hasselmann K. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems[C]// Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 1967, 299(1456): 59-76.
- 2 Benjamin T B, Feir J E. The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1967, 27(03): 417-430.
- 3 Tao A, Zheng J, MeeMee S, et al. The Most Unstable Conditions of Modulation Instability[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012.
- 4 Tao A, Mee M S. Re-study on recurrence period of Stokes wave train with High Order Spectral method[J]. China Ocean Engineering, 2011, 25(4): 679-686.
- 5 Dommermuth D G, Yue D K P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 184: 267-288.
- 6 West B J, Brueckner K A, Janda R S, et al. A new numerical method for surface hydrodynamics[J]. Journal of Geophysical Research: Oceans (1978–2012), 1987, 92(C11): 11803-11824.
- 7 Liu P C, MacHutchon K R. Are there different kinds of rogue waves?[J]. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2008, 130(2): 021007.
- 8 Wu G. Direct simulation and deterministic prediction of large-scale nonlinear ocean wave-field[D]. Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- 9 Zhang J, Hong K, Yue D K P. Effects of wavelength ratio on wave modelling[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1993, 248: 107-127.
- 10 Liu Y, Yue D K P. On generalized Bragg scattering of surface waves by bottom ripples[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1998, 356: 297-326.
- 11 江文山. 深水区非线性波列调变之研究 [D].台湾: 国立成功大学, 2005.
- 12 吴克俭, 孙孚. 海浪波面的信息熵与海浪的谱宽度参量[J]. 海洋与湖沼, 1996, 27(3): 251-257.